

## 循環節142857の新しい特徴（5）

坂井 博通

## Some New Characteristics on Cyclic Number 142857 (5)

Hiromichi Sakai

## 要旨

循環節142857の特徴に関して、新たな知見が得られないかを探索した。主な知見は以下の通り。1) ラマヌジャンの恒等式による142857の表現、2) 切り落とし数の差による142857の表現、3) 1 から n までのべき乗和の999999の剰余が142857になる、4) マーチン・ガードナーの魔方陣の応用、5) 142857のn乗の下6桁の数字の特徴、6) 6桁の数に関して各桁の数字の逆数の和に元の数字が表れる場合、7) 143857で成立する142857と類似する性質。得られたいくつかの知見は情報統計学や数論の素材として利用できる。

キーワード：142857、ラマヌジャン、マーチン・ガードナー、143857

Key words：142857、Ramanujan、Martin Gardner、143857

## 1. はじめに

筆者は、1/7の循環部である142857に関して、従来知られている特徴のほかいくつかの新しい性質を見出して報告してきた(坂井<sup>1,2,3,4,5</sup>)。必ずしも体系的に展開できていないが、その後、さらに新たな知見を得ているので報告するものである。

## 2. 見出した特徴

## 1) ラマヌジャンの1 恒等式による142857の表現

20世紀最大の天才数学者ラマヌジャンは、自らの証明もなしに、高度な恒等式を数百以上も示した。たとえば、 $\pi$ を用いた恒等式には次のようなものがある。

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! (1103 + 26390n)}{(4^n 99^n n!)^4}$$

そのラマヌジャンが示した比較的簡単な恒等式に次のものがある。なお、 $\wedge$ はExcelでの表記でべき常を示す。

$$(6a^2 - 4ab + 4b^2)^3 + (3b^2 + 5ab - 5a^2)^3 \\ = (6b^2 - 4ab + 4a^2)^3 + (3a^2 + 5ab - 5b^2)^3$$

ここで、aとbに1～100の整数を入力し10000組の値を計算して、999999で割った剰余を求める(つまり、下6桁から区切りその和を求め、その和が6桁になればそこでやめ、7桁以上の場合にはさらに下6桁から区切りその和を求め6桁になるまで続ける)。その結果が142857となるものは比較的多く、5組の組み合わせが該当する(表1)。

表1 ラマヌジャンの恒等式に代入した値の mod (x, 999999) が142857になる場合

a	b	恒等式の値
9	64	440, 051, 600, 090, 817
22	71	812, 875, 804, 266, 240
53	64	456, 209, 031, 933, 369
58	8	27, 755, 253, 387, 576
90	64	827, 471, 701, 670, 328

## 2) 切り落とし数の差による142857の表現

坂井<sup>2)</sup>は、「素な素数」にヒントを得て、「切り落

1) 埼玉県立大学保健医療福祉学部健康開発学科

1) Department of Health Sciences, School of Health and Social Services, Saitama Prefectural University

原稿受付日：2014年10月15日

とし数」の和で142857になるものを求めて  
(142857=1+12+128+1285+12857+128574)、  
128574という142857のアナグラム数が142857を  
作ることを見出した。

同様に、「切り落とし数」を引いていき142857に  
なるものを探てみると、16071のみが該当した。

$$142857 = 160712 - 16071 - 1607 - 160 - 16 - 1$$

また、142857の巡回数になる「切り落とし数」  
を求めると表2のようになる。160712を出発点とし  
てほぼ2倍、3倍・・・6倍となっていることがわか  
る。また、切り落とし数で428571となるのは  
482139と482140の1違いの2つの数であることが  
興味深い。

表2 切り落とし数の差操作結果が 142857 の巡回数になる  
もの

x	a	b	c	d	e	x-a-b-c-d-e
160712	16071	1607	160	16	1	142857
321426	32142	3214	321	32	3	285714
482139	48213	4821	482	48	4	428571
482140	48214	4821	482	48	4	428571
642853	64285	6428	642	64	6	571428
803567	80356	8035	803	80	8	714285
964281	96428	9642	964	96	9	857142

### 3) 1からnまでのべき乗和の999999の剰余が142857になる。

1から整数nまでのべき乗和を求める公式は広く  
知られている。導く出すのはそれほど困難なことでは  
ない。ここでは、その和の999999の剰余が  
142857になるnを導こう。

1から142857までの和は、10,204,132,653。そ  
の999999の剰余はやはり142857になる。このよう  
に1からnまでの和に対して999999の剰余を求め  
て、それが元の数と等しくなる6桁の数はカプレカ  
数とほぼ同じである。

2乗和に関しては、142857まであげれば、46656、  
57590、120730、123376、137565、140211、  
142857である。

3 乗和に関しては、46656、57590、120730、  
140211、194804、288359、307840、370980、  
464535 などである。

また、142857自体も1から自然数nまでの和を使  
用して次のように表現できる。

$$\begin{aligned} 142857 &= 351 \times 407 \\ &= (1+2+3+\dots+25+26) \times \\ &\quad \{(1+2+3+\dots+27+28)+1\} \end{aligned}$$

### 4) マーチン・ガードナーの魔方陣の応用

マーチンガードナーは、セルの総合計が666（悪  
魔数と呼ばれる）で、同じ行や列からセルを選ばな  
いという条件のもとに6つのセルを自由に選ぶとそ  
の合計が111になるような6行6列の魔方陣を示し  
た。

図1 和が142857になるガードナー的魔方陣の作成

28	26	30	27	29	25	→	36036	33462	38610	34749	37323	32175
34	32	36	33	35	31		43758	41184	46332	42471	45045	39897
16	14	18	15	17	13		20592	18018	23166	19305	21879	16731
4	2	6	3	5	1	1287倍	5148	2574	7722	3861	6435	1287
10	8	12	9	11	7		12870	10296	15444	11583	14157	9009
22	20	24	21	23	19		28314	25740	30888	27027	29601	24453

ところで、142857=111\*1287と111を用いた積  
で表されるため、ガードナーの魔方陣のセルを1287  
倍すれば、6つのセルを選んで合計すると142857に  
なる魔方陣が作成できる（図1）。さらに、この魔方  
陣のセルの合計は857142と142857のアナグラム  
数になることを注意しておこう。

### 5) 142857のn乗の下6桁の数字

142857を2乗すると20,408,122,449。これを  
20408+122449=142857と下6桁から6桁ずつ区  
切って合計する操作は、142857の性質を調べるの  
によく用いた。しかし、2乗した場合の下6桁の数字、  
3乗した場合の下6桁の数字とn乗した場合の下6桁  
の数字がどのようになるかは調べてこなかった。こ  
れは、Excelでも簡単に調べることができるので、  
それを求めてみると5000乗で1になることがわかっ  
た。つまり、5001乗で下6桁は142857に回帰する  
のである。

そして、現れる5000個の下6桁の数字を小さな順  
に並べ、隣接する数の差をとると、48→408→336  
→8→408・・・と繰り返すことがわかる（表3）。

また、ループとなる5000個の下6桁の数のうち、  
142857のアナグラム数は128457、214857、  
481257、812457、841257となる。

表3 142857のn乗に現れる下6桁の数字(昇順)

現れる下6桁の数	隣接する数との差
1	-
49	48
457	408
793	336
801	8
849	48
1257	408
1593	336
1601	8
1649	48
2057	408
2393	336
2401	8
2449	48
2857	408
3193	336
3201	8
3249	48
3657	408
3993	336
4001	8

#### 6) 6桁の数に関して各桁の数字の逆数の和に元の数字が表れる

6桁の数について、0を含まない逆数が存在する場合に、各桁の数字の逆数を求め、元の6桁の数が現れるかを調べる。たとえば、142857の場合には、

$$1/1 + 1/4 + 1/2 + 1/8 + 1/5 + 1/7 \\ = 2.21785714285714 \dots$$

となり、142857が現れる。

そして、この例でわかるように142857とその循環数がこの条件に該当する。他に該当するのは583333のみである。Excelで計算したので15桁までで成立するという条件付きである。

また、元の各桁の数字の積の逆数を計算し、その中に元の数を含むか調べてみる。これは、1を各桁の数字で次々と割ることと同じである。たとえば、142857については

$$1 / (1 \times 4 \times 2 \times 8 \times 5 \times 7) = 1/2240 \\ = 0.0004464285714285 \dots \text{となる。}$$

ここでも容易にわかるように142857とその循環数でこの性質が成り立つ。他の6桁の数を調べると、この性質を満たすのはあと882812、944444の2つしかない。

#### 7) 143857で成立する142857と類似する性質

カプレカ数の定義は正の整数xの2乗をして、xの桁数に等しい9を重ねる数で割るともとの数に等しくなるというものである。たとえば、 $45^2 = 2025$  この数を99で割った余り(つまり $20 + 25$ )は元の

45になる。この定義を拡張して、3乗、4乗・・・とすることも考えられる。これを拡張カプレカ数と言う。

さて、その3乗で成立する拡張カプレカ数に143857という142857に類似した数がある。この数が興味深いのは、

$$143857^2 = 20,694,836,449 \\ (20694 + 836449 = 857143)$$

となり、このように2乗した場合には143857の巡回数になることである。また、857143自身は次のように2乗のカプレカ数である。

$$857143^2 = 734,694,122,449 \\ (734694 + 122449 = 857143)$$

また3乗カプレカ数である856142という142857の巡回数に類似した数の2乗に関しても、このような操作を行うと

$$856142^2 = 732,979,124,164 \\ (732979 + 124164 = 857143) \quad 857143$$

になる。さらに142857から1を減じた142856の2乗に関しても

$$20,407,836,736 \quad (20407 + 836736 = 857143)$$

と857143になる。

#### 8) 逆順数との演算を通して等しい数をつくる

142857の逆順数は758241である。ここで1から999999までの数aをとり、その逆順数rを考える。ここで $142857 \times a$  と  $758241 \times r$  が等しくなる数を求めてみる。たとえば、 $a = 123456$  とすると  $r = 654321$  で  $142857 \times 123456 = 17,636,553,792$ 、 $758241 \times 654321 = 496,133,009,361$  と異なる結果となる。このようにして2種類の積を求めると、等しくなるのは自明の  $a = 758241$  を除くと75141しかない。

また、 $142857/a$  と  $758241/r$  が等しくなる数を求めると、ある程度自明であるが、やはり14157しかない。これは75141の逆順数である。

そのほか、 $142857 + a = 758241 + r$  や  $142857 - a = 758241 - r$  については多くの数について成立する。

### 3. まとめにかえて

今回見出した142857の特徴も、べき乗に関するものが多かった。それは、筆者が計算のしやすさと

結果の美しさを考慮して探っているからである。割り算に関する演算や繁分数について調べると、さらに興味深い結果が出てくると思われるが、これはExcelなどの表計算ソフトに関して、計算可能な桁数が格段に大きくならないと探索するのは一般には困難で、授業に積極的に用いることはむずかしい。

また、ラマヌジャンが残した複雑不思議な等式と142857の関係をさらに探ることができれば、ラマヌジャンの業績の理解にも貢献することになるだろう。

## 参考文献

- 1) 坂井博通.循環節142857にかかわる新しい特徴.埼玉県大紀2007;9:91-95
- 2) 坂井博通.循環節142857にかかわる新しい特徴 (2) .埼玉県大紀2011;13:149-151
- 3) 坂井博通.循環節142857にかかわる新しい特徴 (3) .埼玉県大紀2012;14:135-138
- 4) 坂井博通.循環節142857にかかわる新しい特徴 (4) .埼玉県大紀2013;15:95-99
- 5) 坂井博通.計算して楽しむジョークナンバー142857,学文社,東京,2012:1-129